Section A_1 — DURÉE : 4 heures

PREMIÈRE COMPOSITION

Les parties II et III sont indépendantes de la partie I. La partie III est indépendante des questions 1° à 7° de la partie II.

I

Soit G un sous-groupe du groupe multiplicatif U des nombres complexes de module 1. On désigne par H le sous-groupe de G engendré par les éléments $a \in G$ tels que $|1 - a| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1° On suppose G fini à n éléments.

a. Démontrer que G est le groupe des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

b. Expliciter un polynôme du troisième degré à coefficients entiers et dont $2\cos(2\pi/9)$ est racine.

c. Démontrer que $G = H$ sauf pour $2 \leqslant n \leqslant 8$ où $H = \{1\}$.

2° On suppose G infini.

a. Démontrer qu'il existe un élément $a_0 \in G$, $0 < |1 - a_0| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b. Prouver que, pour chaque $b \in G$, il existe un entier n tel que $|a_0^n - b| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

c. Qu'en déduit-on pour H ?

Pour toute matrice carrée $n \times n$ à termes complexes $A = (a_{ij})$, on pose

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

et on désigne par A^* la matrice (b_{ij}) telle que $b_{ij} = \overline{a}_{ji}$ pour $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\overline{a}_{ji}$ étant le nombre complexe conjugué de a_{ji}.

1° Vérifier que l'espace vectoriel $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ des matrices carrées $n \times n$ à termes complexes est un espace vectoriel hermitien $\mathcal{H}$ pour $(A, B) \longrightarrow \operatorname{tr}(AB^*)$.

On pose pour toute la suite, $\| A \| = \sqrt{\operatorname{tr}(AA^*)}$ *pour toute matrice* A *de* $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$.

2° Donner une base orthonormale de $\mathcal{H}$.

3° Si U est une matrice unitaire de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$, vérifier les égalités

$$\| UA \| = \| AU \| = \| A \| \qquad \text{pour toute matrice A de } \mathbf{M}_n(\mathbf{C}).$$

4° Désignant par I la matrice unité de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$, démontrer que, si A est une matrice diagonale de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$, on a

$$\| AB - BA \| \leqslant \sqrt{2}\, \| A \|\, \| B \| \qquad \text{pour toute matrice B de } \mathbf{M}_n(\mathbf{C}).$$

En déduire que, pour toutes matrices unitaires A, B de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$, on a, pour $C = ABA^{-1}B^{-1}$, $\| I - C \| \leqslant \sqrt{2}\, \| I - A \|\, \| I - B \|$, (on pourra écrire $AB - BA = (I - A)(I - B) - (I - B)(I - A)$).

5° Soient A, B deux matrices unitaires de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ engendrant un sous-groupe fini du groupe multiplicatif $\mathbf{U}_n$ des matrices unitaires de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$.

Démontrer que la suite de matrices

$$B_0 = B, \quad B_1 = AB_0A^{-1}B_0^{-1}, \quad \ldots, \quad B_{k+1} = AB_kA^{-1}B_k^{-1}, \quad \ldots$$

vaut constamment I à partir d'un certain rang dès lors que $\| I - A \| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

6° Soient A, B deux matrices unitaires de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$.

a. Démontrer que si $AB = BA$ il existe une matrice unitaire U pour laquelle UAU^{-1} et UBU^{-1} sont simultanément diagonales.

b. Prouver que, si A et BAB^{-1} sont diagonales, il existe une matrice unitaire P dont tous les termes non nuls sont égaux à 1 et telle que $BAB^{-1} = P^{-1}AP$.

c. Pour $C = ABA^{-1}B^{-1}$, si $AC = CA$ montrer qu'il existe une matrice unitaire U pour laquelle UAU^{-1} et $UBAB^{-1}U^{-1}$ sont simultanément diagonales. Si de plus $\| I - B \| < 2$, prouver que $AB = BA$.

7° Soit H un sous-groupe de $\mathbf{U}_n$ dont tout sous-groupe à deux générateurs est fini. Démontrer que, si H est engendré par ses éléments A tels que $\| I - A \| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors H est abélien.

III

Dorénavant G désigne un sous-groupe du groupe $\mathbf{U}_n$ et H désigne le sous-groupe de G engendré par les matrices $A \in G$ vérifiant l'inégalité

$$\| I - A \| < \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

1° Démontrer que H est un sous-groupe distingué de G.

2° Montrer que si R et S sont deux éléments de G non situés dans la même classe d'équivalence modulo H alors $\| R - S \| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3° Soit r un nombre réel $\geqslant 0$ et soit $a_1, \ldots, a_k, \ldots$ une suite de nombres réels. On pose, pour tous entiers $n \geqslant 1$ et $m < n$, $m \geqslant 1$

$$v_{n,0}(x_1, \ldots, x_n, r) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \leqslant r^2 \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 > r^2 \end{cases}$$

$$v_{n,m}(x_{m+1}, \ldots, x_n, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{n,m-1}(x_m, \ldots, x_n, r)\, dx_m$$

$$v_{n,n}(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{n,n-1}(x_n, r)\, dx_n$$

a. Calculer $v_{1,1}(r)$ et $v_{2,2}(r)$.

b. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, on a

$$v_{n,n}(r) = \iint_D v_{n-2,n-2}\left(\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\right) dx\, dy$$

où D est le disque $x^2 + y^2 \leqslant r^2$.

c. **En déduire que $v_{n,n}(r) = \lambda(n)\, r^n$, où λ est une suite de nombres réels pour laquelle on explicitera le $n^{\text{ième}}$ terme selon la parité de n.**

4° Soient N boules, dans un espace euclidien de dimension n, centrées à la distance r de l'origine, de rayon ε et d'intersections deux à deux vides. Déduire de la question précédente, en introduisant pour chaque boule $\mathcal{B}$ une fonction $v_{n,n}(\mathcal{B})$, l'inégalité :

$$(r + \varepsilon)^n \geqslant N \varepsilon^n + (r - \varepsilon)^n .$$

5° Démontrer que le groupe-quotient G/H est fini et a au plus $(\sqrt{8n} + 1)^{2n^2} - (\sqrt{8n} - 1)^{2n^2}$ éléments.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail